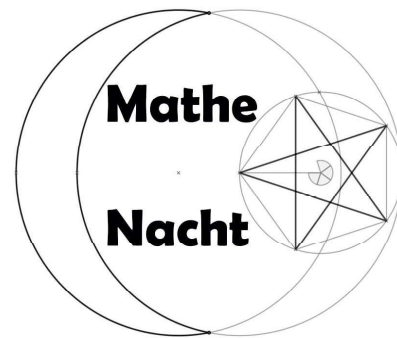
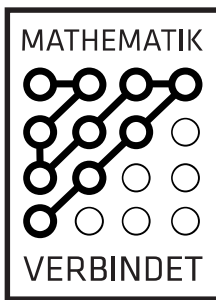


Hinweis: Das Thema "Integrale" kommt bei diesen Aufgaben nicht vor. Es ist aber trotzdem klausurrelevant!

Grundlagen



1. Aufgabe:

Vollständige Induktion

Beweise die folgenden (Un-)Gleichungen/ Aussagen mittels vollständiger Induktion.

- 1) $\forall n \geq 1$ gilt : $3^{2n+4} - 2^{n-1}$ ist durch 7 teilbar
- 2) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt : $\frac{2}{3}n + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \in \mathbb{Z}$
- 4) $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$
- 5) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \forall n \geq 2$
- 6) Eine Ebene kann durch n Geraden maximal in $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegt werden.

2. Aufgabe:

Gleichungen & Ungleichungen

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden (Un-)gleichungen erfüllen.

- 1) $|x + 2| \leq |x - 1|$
- 2) $|2 - |x + 1|| \leq 1$
- 3) $\frac{|1-x|}{x+3} \geq -2$
- 4) $\frac{3|x-2|}{3x-2} < -2$
- 5) $x + \frac{1}{x} = 2$
- 6) $z^2 = \frac{4i-2}{3-i}$
- 7) $z^2 - 2z + 5 = 0$
- 8) $|z - i| = |z + 1| = 1$
- 9) $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| \leq 1$

3. Aufgabe :

Komplexe Zahlenebene

Skizziere die folgenden Mengen mit $z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

- 1) $M_1 = \{|z - 4 - 6i| = |z + 2 - 4i|\}$
- 2) $M_2 = \{|Im(z)| < 1 \wedge |z| \geq \frac{1}{2}\}$
- 3) $M_3 = \{|z - 1| = |z + 1|\}$
- 4) $M_4 = \{1 < |z - i| < 2\}$
- 5) $M_5 = \{|z| \geq 1 \wedge |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \wedge Im(z) > 0\}$
- 6) $M_6 = \{|z - z_0| \leq r\}$ für $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ fest
- 7) $M_7 = \{\frac{|z-i|}{|z+i|} \leq 1 \wedge |z - 4| \leq 3\}$
- 8) $M_8 = \{|z| \leq 1 - Re(z)\}$

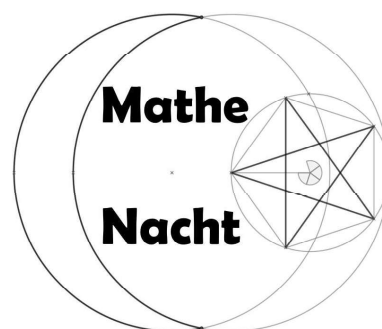
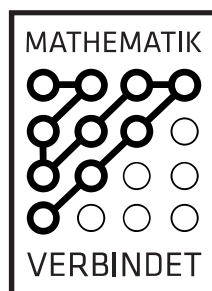
4. Aufgabe :

Mengen

Untersuche, ob die folgenden Mengen nach oben oder unten beschränkt sind. Bestimme ggf. Supremum und/ oder Infimum der Mengen. Handelt es sich bei diesen auch um ein Maximum/ Minimum?

- 1) $M_1 = \{n \in \mathbb{N} : 1 + (-1)^n\}$
- 2) $M_2 = \{n, k \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} + \frac{1}{k}\}$
- 3) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{61}{81} \geq 0\}$
- 4) $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 289\}$
- 5) $M_5 = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2\} \cup \{0\}$
- 6) $M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1+|x|}\}$
- 7) $M_7 = \{x \in \mathbb{R} : x(2 - x) > 1 + |x|\}$

Folgen



1. Aufgabe:

Berechne den Grenzwert der folgenden Zahlenfolgen:

a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

b) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n - 2} - \frac{n^3}{(n + 1)(n - 3)}$

c) $a_n = \left(n^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$ (Tipp: Verwende ein Resultat der Vorlesung)

Wer es etwas kniffliger möchte, kann auch den Binomischen Lehrsatz für $(1 + 1)^n$ verwenden, um $\left(\frac{1}{2} \right)^n$ darzustellen und damit den Grenzwert berechnen.

d) $a_n = \frac{n \cdot \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}}$

e) $a_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} \right)$

2. Aufgabe:

Bestimme die Häufungspunkte der folgenden Zahlenfolgen:

a) $a_n = \sqrt[n]{2} \cos(n\pi)$

b) $\frac{i^n n^2 - 1}{3n^2}$

3. Aufgabe:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige die Konvergenz der rekursiven Zahlenfolgen und bestimme deren Grenzwert.

a) Benutze das Cauchy-Kriterium, um die Konvergenz der folgenden Zahlenfolge zu zeigen:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1, a_1 = 1$$

b) $a_{n+1} = a_n(2 - x \cdot a_n)$, $0 < a_1 < \frac{1}{x}$, $x > 0$ (Tipp: Betrachte $a_{n+1} - \frac{1}{x}$, um auf die Beschränktheit der Folge zu schließen)

c) Zum Knobeln. So eine Aufgabe wird euch in der Klausur nicht erwarten.

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2, a_0 = a, a_1 = b$$

(*Tipp:* Stelle den Term $a_{k+1} - a_k$ in Abhängigkeit von k , b und a dar (dafür kannst du für a_{k+1} die rekursive Definition einsetzen und den Term vereinfachen, dann wieder a_k einsetzen u.s.w.) und nutze eine Teleskopsumme um a_n darzustellen)

4. Aufgabe:

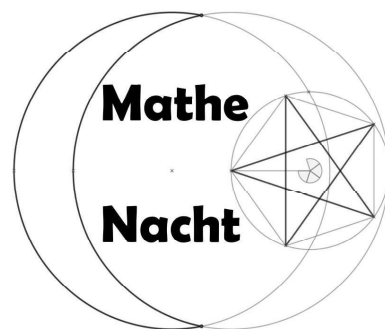
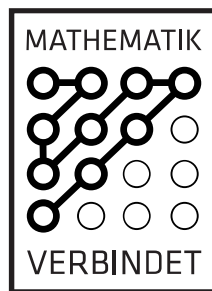
Gegeben sei die Zahlenfolge $a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{2}$. Finde einen Startwert a_1 , für den die Folge konvergiert und einen, für den sie divergiert. Begründe deine Antwort und gib im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

5. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig? Finde für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel.

- Konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}) , (a_{2n+1}) und (a_{3n}) einer Zahlenfolge (a_n) , so konvergiert auch die Folge (a_n) selbst.
- Jede beschränkte Folge ist konvergent.
- Eine Folge, die nur positive Folgenglieder hat und gegen Null konvergiert, ist stets monoton fallend.
- Seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen. Gilt $a_n \rightarrow 0$, so gilt für eine beliebige Folge (b_n) , dass $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$.
- $\forall \epsilon > 0$ existieren nur endlich viele k mit $|a_k - c| > \epsilon$. \Rightarrow Die Folge (a_k) konvergiert gegen c .
- Liegen in jeder ϵ -Umgebung um c unendlich viele Folgenglieder der Folge (a_n) , so konvergiert diese gegen c .
- Jede konvergente Folge ist monoton.
- Sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge und (b_n) eine beschränkte Zahlenfolge, so hat die Zahlenfolge $(a_n b_n)$ mindestens einen Häufungspunkt.

Reihen



1. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2020}}{2020^n}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2-1}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{6n+2}\right)^{(-1)^n n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)+1}{n^2}$

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n}$

2. Untersuche die Reihe aus 1c) auf absolute Konvergenz!

3. Die folgenden Reihen konvergieren. Bestimme den Grenzwert der Reihen!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

(Tipp zu (b): Betrachte zunächst $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.)

4. Gegeben ist $x = 0,0\overline{2}$. Bestimme die dazugehörige rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ im Dezimal- und Dualsystem!

(Stichwort: b-adischer Bruch)

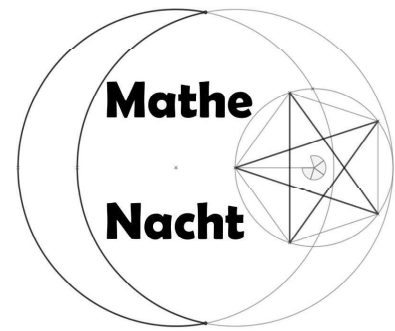
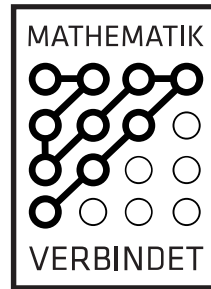
5. Untersuche folgende Reihen in \mathbb{C} auf Konvergenz!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7i}{10}\right)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + 4i)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(n+1)^4}$

Funktionen



1. Aufgabe:

Man betrachte die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x^\alpha & \text{für } x > 0 \end{cases}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Untersuche die Funktion auf Stetigkeit in $x_0 = 0$ in Abhängigkeit von α .
- Offensichtlich ist f_α für $\alpha > 0$ in $x_0 = 2$ differenzierbar. Bestimme die Umkehrfunktion $g_\alpha = f_\alpha^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f_\alpha(x_0) = f_\alpha(2) = 2^\alpha := y_0$, also $g'_\alpha(2^\alpha)$.

2. Aufgabe:

Für ein festes $\alpha > 0$ ist die Funktion $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = \sin(|x|^\alpha)$ gegeben. Untersuche g auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in Abhängigkeit von α .

3. Aufgabe:

Die Funktion $h_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{|x|+2}{|x|+a} & \text{für } x \neq 0 \\ b & \text{für } x = 0 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

- Sei $a > 0$. Untersuche h_a auf Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich. Existiert ein $b \in \mathbb{R}$, sodass h_a in $x_0 = 0$ stetig ist?
- Gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, sodass h_a für $a = 0$ in $x_0 = 0$ stetig ist?
- Untersuche h_a für $a > 0$ auf Differenzierbarkeit. Wie kann man den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit formulieren?

4. Aufgabe:

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Falls wahr, begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel an, falls die Aussage falsch ist.

- Jede stetige Funktion auf dem Intervall $(1, 2)$ ist beschränkt.
- Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann besitzt f eine Umkehrfunktion.
- Jede stetige Funktion nimmt auf $[0, 1]$ ihr Maximum an.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig.

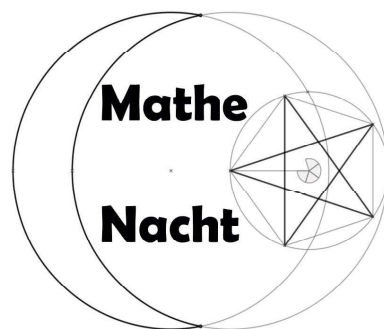
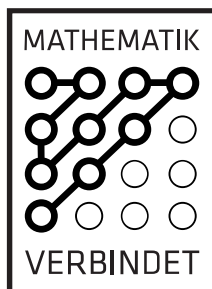
5. Aufgabe:

Kreuze an, was richtig ist. (Mehrfachantworten möglich)

- Welche Behauptungen für reelle Funktionen sind richtig?
 - Die Summe zweier stetiger Funktionen ist immer stetig.
 - Die Summe zweier unstetiger Funktionen ist immer unstetig.
 - Die Summe einer stetigen und einer unstetigen Funktion ist stets unstetig.
 - Das Produkt einer stetigen und einer unstetigen Funktion kann stetig sein.
- $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist

<input type="checkbox"/> stetig	<input type="checkbox"/> injektiv
<input type="checkbox"/> differenzierbar	<input type="checkbox"/> surjektiv
<input type="checkbox"/> monoton	

Thema: Beweise



1. Aufgabe: (Folgen und Reihen)

- (a) Es sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeige, dass $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge ist.
- (b) Sei $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{1}{a_1 + \dots + a_n}$. Zeige, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert.
- (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n > 0$ und $b_n > 0$. Außerdem sei $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Zeige nun:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert genau dann, wenn } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert.}$$

2. Aufgabe: (Funktionen)

Zeige, dass die Funktion $f(x) := \sin(x) - e^{-x}$ im abgeschlossenen Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle besitzt.

(Hinweis: Nutze den Zwischenwertsatz)

3. Aufgabe: (Wahr oder Falsch)

Welche Aussagen treffen zu? Beweise oder widerlege mit einem selbstgewähltem Gegenbeispiel:

- (a) Jede beschränkte Folge ist auch konvergent.
- (b) Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.
- (c) Sei (a_n) eine beliebige Folge und (b_n) eine beschränkte Folge. Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent, dann ist auch } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konvergent.}$$