Hinweis: Das Thema "Integrale" kommt bei diesen Aufgaben nicht vor. Es ist aber trotzdem klausurrelevant!

Grundlagen

1. Aufgabe:

Vollständige Induktion

Beweise die folgenden (Un-)Gleichungen/ Aussagen mittels vollständiger Induktion.

1) $\forall n \geq 1$ gilt : $3^{2n+4} - 2^{n-1}$ ist durch 7 teilbar
2) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
3) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt : $\frac{2}{3}n + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \in \mathbb{Z}$
4) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$
5) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \forall n \geq 2$
6) Eine Ebene kann durch n Geraden maximal in $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegt werden.

2. Aufgabe:

Gleichungen & Ungleichungen

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden (Un-)gleichungen erfüllen.

1) $|x + 2| \leq |x - 1|$
2) $|2 - |x + 1|| \leq 1$
3) $\frac{|1-x|}{x+3} \geq -2$
4) $\frac{3|x-2|}{3x-2} < -2$
5) $x + \frac{1}{x} = 2$
6) $z^2 = \frac{4i-2}{3-i}$
7) $z^2 - 2z + 5 = 0$
8) $|z - i| = |z + 1| = 1$
9) $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| \leq 1$

3. Aufgabe:

Komplexe Zahlenebene
Skizziere die folgenden Mengen mit $z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

1) $M_1 = \{|z - 4 - 6i| = |z + 2 - 4i|\}$
2) $M_2 = \{|Im(z)| < 1 \ \wedge \ |z| \geq \frac{1}{2}\}$
3) $M_3 = \{|z - 1| = |z + 1|\}$
4) $M_4 = \{1 < |z - i| < 2\}$
5) $M_5 = \{|z| \geq 1 \ \wedge \ |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \ \wedge \ Im(z) > 0\}$
6) $M_6 = \{|z - z_0| \leq r\}$ für $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ fest
7) $M_7 = \{\frac{|z-i|}{|z+i|} \leq 1 \ \wedge \ |z - 4| \leq 3\}$
8) $M_8 = \{|z| \leq 1 - Re(z)\}$

4. Aufgabe:

Mengen
Untersuche, ob die folgenden Mengen nach oben oder unten beschränkt sind. Bestimme ggf. Supremum und/ oder Infimum der Mengen. Handelt es sich bei diesen auch um ein Maximum/ Minimum?

1) $M_1 = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 + (-1)^n\}$
2) $M_2 = \{n, k \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{n} + \frac{1}{k}\}$
3) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{61}{81} \geq 0\}$
4) $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 289\}$
5) $M_5 = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - 3| < 2\} \cup \{0\}$
6) $M_6 = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{|x|}{1+|x|}\right\}$
7) $M_7 = \{x \in \mathbb{R} : \ x(2 - x) > 1 + |x|\}$

Folgen

1. Aufgabe:

Berechne den Grenzwert der folgenden Zahlenfolgen:

a) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

b) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n-2} - \dfrac{n^3}{(n+1)(n-3)}$

c) $a_n = \left(n^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ (*Tipp:* Verwende ein Resultat der Vorlesung)

Wer es etwas kniffliger möchte, kann auch den Binomischen Lehrsatz für $(1+1)^n$ verwenden, um $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ darzustellen und damit den Grenzwert berechnen.

d) $a_n = \dfrac{n \cdot \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}}$

e) $a_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2} + \dfrac{n}{n^2}\right)$

2. Aufgabe:

Bestimme die Häufungspunkte der folgendenZahlenfolgen:

a) $a_n = \sqrt[n]{2}\cos(n\pi)$

b) $\dfrac{i^n n^2 - 1}{3n^2}$

3. Aufgabe:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige die Konvergenz der rekursiven Zahlenfolgen und bestimme deren Grenzwert.

a) Benutze das Cauchy-Kriterium, um die Kovergenz der folgenden Zahlenfolge zu zeigen:
$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1, a_1 = 1$

b) $a_{n+1} = a_n\left(2 - x \cdot a_n\right), 0 < a_1 < \dfrac{1}{x}, x > 0$ (*Tipp:* Betrachte $a_{n+1} - \frac{1}{x}$, um auf die Beschränktheit der Folge zu schließen)

c) *Zum Knobeln. So eine Aufgabe wird euch in der Klausur nicht erwarten.*
$a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2, a_0 = a, a_1 = b$

(*Tipp:* Stelle den Term $a_{k+1} - a_k$ in Abhängigkeit von k, b und a dar (dafür kannst du für a_{k+1} die rekursive Definition einsetzen und den Term vereinfachen, dann wieder a_k einsetzen u.s.w.) und nutze eine Teleskopsumme um a_n darzustellen)

4. Aufgabe:

Gegeben sei die Zahlenfolge $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n^2}{2}$. Finde einen Startwert a_1, für den die Folge konvergiert und einen, für den sie divergiert. Begründe deine Antwort und gib im Falle der Kovergenz den Grenzwert an.

5. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig? Finde für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel.

- ☐ Kovergieren die Teilfogen $(a_{2n}), (a_{2n+1})$ und (a_{3n}) einer Zahlenfolge (a_n), so konvergiert auch die Folge (a_n) selbst.
- ☐ Jede beschränkte Folge ist kovergent.
- ☐ Eine Folge, die nur positive Folgenglieder hat und gegen Null kovergiert, ist stets monoton fallend.
- ☐ Seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen. Gilt $a_n \to 0$, so gilt für eine beliebige Folge (b_n), dass $a_n \cdot b_n \to 0$.
- ☐ $\forall \epsilon > 0$ existieren nur endlich viele k mit $\mid a_k - c \mid > \epsilon$. $\Rightarrow$ Die Folge (a_k) konvergiert gegen c.
- ☐ Liegen in jeder ϵ-Umgebung um c unendlich viele Folgenglieder der Folge (a_n), so konvergiert diese gegen c.
- ☐ Jede konvergente Folge ist monoton.
- ☐ Sei (a_n) eine kovergente Zahlenfolge und (b_n) eine beschränkte Zahlenfolge, so hat die Zahlenfolge $(a_n b_n)$ mindestens einen Häufungspunkt.

Reihen

1. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz!

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2020}}{2020^n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2-1}$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3}$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)+1}{n^2}$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{6n+2}\right)^{(-1)^n n}$

(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n}$

2. Untersuche die Reihe aus 1c) auf absolute Konvergenz!

3. Die folgenden Reihen konvergieren. Bestimme den Grenzwert der Reihen!

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

(Tipp zu (b): Betrachte zunächst $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.)

4. Gegeben ist $x = 0,\overline{02}$. Bestimme die dazugehörige rationale Zahl $x = \frac{p}{q}, p, g \in \mathbb{N}$ im Dezimal- und Dualsystem!
(Stichwort: b-adischer Bruch)

5.Untersuche folgende Reihen in $\mathbb{C}$ auf Konvergenz!

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7i}{10}\right)^n$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3+4i)^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(n+1)^4}$

Funktionen

1. Aufgabe:

Man betrachte die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ x \leq 0 \\ x^\alpha & f\ddot{u}r\ x > 0 \end{cases}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Untersuche die Funktion auf Stetigkeit in $x_0 = 0$ in Abhängigkeit von α.

b) Offensichtlich ist f_α für $\alpha > 0$ in $x_0 = 2$ differenzierbar. Bestimme die Umkehrfunktion $g_\alpha = f_\alpha^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f_\alpha(x_0) = f_\alpha(2) = 2^\alpha := y_0$, also $g'_\alpha(2^\alpha)$.

2. Aufgabe:

Für ein festes $\alpha > 0$ ist die Funktion $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = \sin(|x|^\alpha)$ gegeben. Untersuche g auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in Abhängigkeit von α.

3. Aufgabe:

Die Funktion $h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|+2}{|x|+a} & f\ddot{u}r\ x \neq 0 \\ b & f\ddot{u}r\ x = 0 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

a) Sei $a > 0$. Untersuche h_a auf Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich. Existiert ein $b \in \mathbb{R}$, sodass h_a in $x_0 = 0$ stetig ist?

b) Gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, sodass h_a für $a = 0$ in $x_0 = 0$ stetig ist?

c) Untersuche h_a für $a > 0$ auf Differenzierbarkeit. Wie kann man den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit formulieren?

4. Aufgabe:

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Falls wahr, begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel an, falls die Aussage falsch ist.

- Jede stetige Funktion auf dem Intervall $(1, 2)$ ist beschränkt.
- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann besitzt f eine Umkehrfunktion.
- Jede stetige Funktion nimmt auf $[0, 1]$ ihr Maximum an.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig.

5. Aufgabe:

Kreuze an, was richtig ist. (Mehrfachantworten möglich)

- Welche Behauptungen für reelle Funktionen sind richtig?

  ☐ Die Summe zweier stetiger Funktionen ist immer stetig.

  ☐ Die Summe zweier unstetiger Funktionen ist immer unstetig.

  ☐ Die Summe einer stetigen und einer unstetigen Funktion ist stets unstetig.

  ☐ Das Produkt einer stetigen und einer unstetigen Funktion kann stetig sein.

- $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist

  ☐ stetig

  ☐ differenzierbar

  ☐ monoton

  ☐ injektiv

  ☐ surjektiv

Thema: Beweise

1. Aufgabe: (*Folgen und Reihen*)

(a) Es sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeige, dass $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge ist.

(b) Sei $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{1}{a_1+...+a_n}$. Zeige, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n > 0$ und $b_n > 0$. Außerdem sei $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ für $n \to \infty$. Zeige nun:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert genau dann, wenn } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert.}$$

2. Aufgabe: (*Funktionen*)

Zeige, dass die Funktion $f(x) := sin(x) - e^{-x}$ im abgeschlossenem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle besitzt.
(Hinweis: Nutze den Zwischenwertsatz)

3. Aufgabe: (*Wahr oder Falsch*)

Welche Aussagen treffen zu? Beweise oder widerlege mit einem selbstgewähltem Gegenbeispiel:

(a) Jede beschränkte Folge ist auch konvergent.

(b) Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

(c) Sei (a_n) eine beliebige Folge und (b_n) eine beschränkte Folge. Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent, dann ist auch} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konvergent.}$$